Complexe Analyse 27-06-03

Tentamenopgave[1]

I

1. Formuleer het maximum-modulusprincipe.

2. Toon aan dat de functie $z \mapsto |\sin z|$ op $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{C}$ haar maximum bereikt in het punt $\frac{\pi}{2} + 2\pi i$.

II

1. a. Formuleer de stelling van Cauchy.

b. Bereken de integraal $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1}$, $\qquad \Gamma = \{z : |z| = \frac{1}{2}\}$.

2. a. Geef de formule van Cauchy in het geval van een kringintegraal rond een cirkel.

b. Bereken de integraal $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z - 2} dz$, $\qquad \Gamma = \{z : |z| = 3\}$.

N.B. Alle cirkels in vraag II en III worden geacht positief (anti-klok) georiënteerd te zijn.

III

1. Formuleer de residu-stelling voor het geval van een kringintegraal rond een cirkel.

2. Bereken de integraal $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2 + 2} dz$,

i. met $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$.

ii. met $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$.

3. Bereken de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^2}$.

Aanwijzing: Voor de berekening van het residu in i ontwikkel in termen van $z = i + h$ en identificeer de coëfficient van $\frac{1}{h}$.

IV

1. Beschouw de reeksontwikkeling

$$\frac{e^z}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

a. Bepaal de convergentiestraal van deze reeks.

b. Bepaal de coëfficienten a_0, a_1, a_2.

[1] De onderdelen I, II, III en IV zijn onafhankelijk.